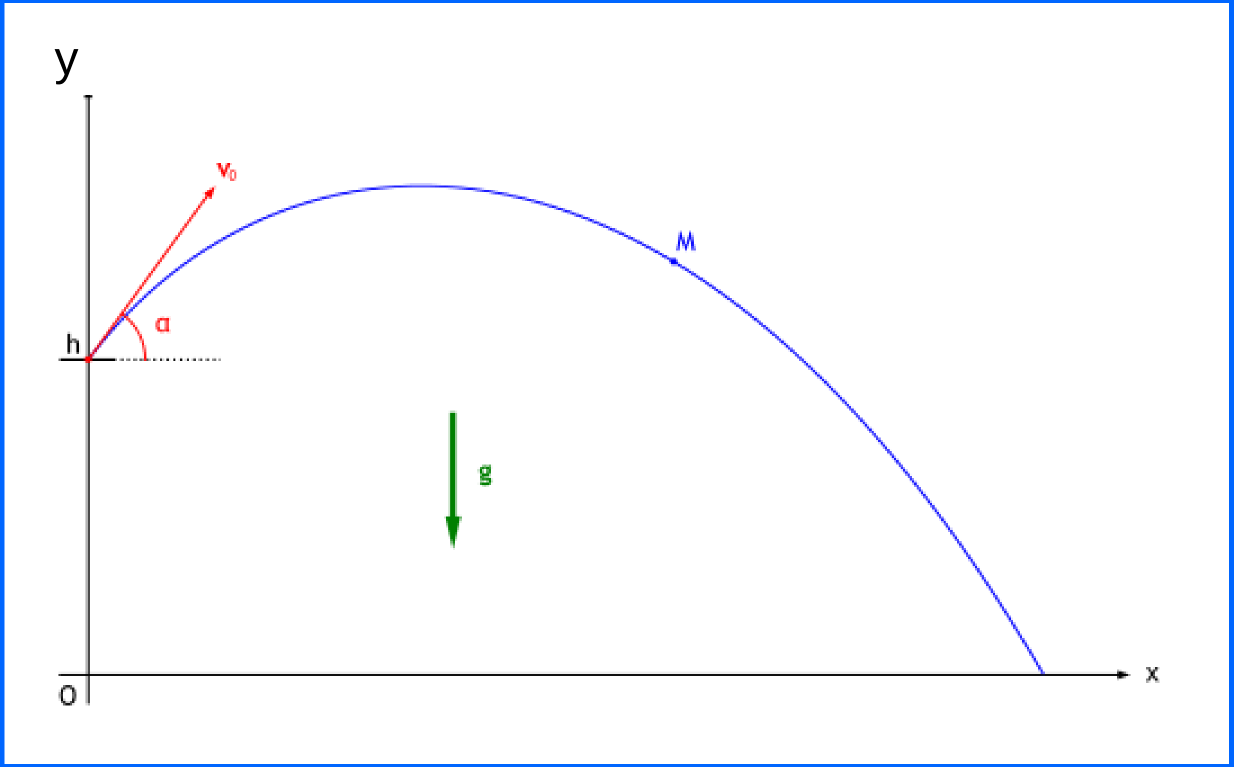
Mouvement parabolique dans un champ de pesanteur uniforme

Application de la seconde loi de Newton



Le projectile n'est soumis qu'à l'action de son poids.

En appliquant la deuxième loi de Newton

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{P} = m\vec{a}$ avec $\vec{P} = m\vec{g}$ On obtient: $m\vec{g} = m\vec{a}$

En simplifiant par m: $\vec{g} = \vec{a}$

L'accélération du projectile est donc égale au vecteur champ de pesanteur.

Les coordonnées du vecteur accélération sont alors:

$$\boxed{a_x = 0 \quad \text{et} \quad a_y = -\, g}$$

Etablissement des équations horaires

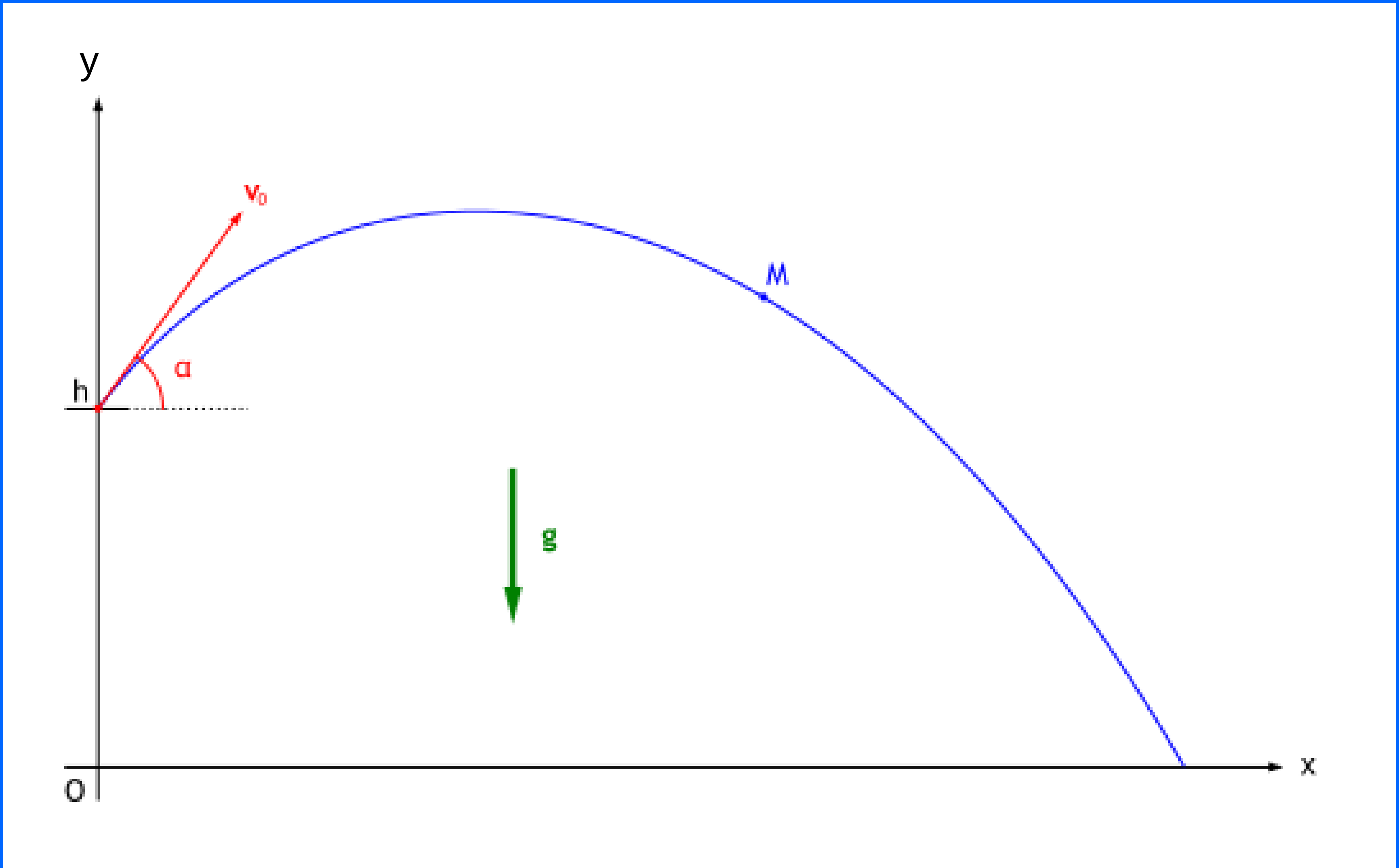
Les équations horaires sont les équations de $x = f(t)$ et $y = f(t)$

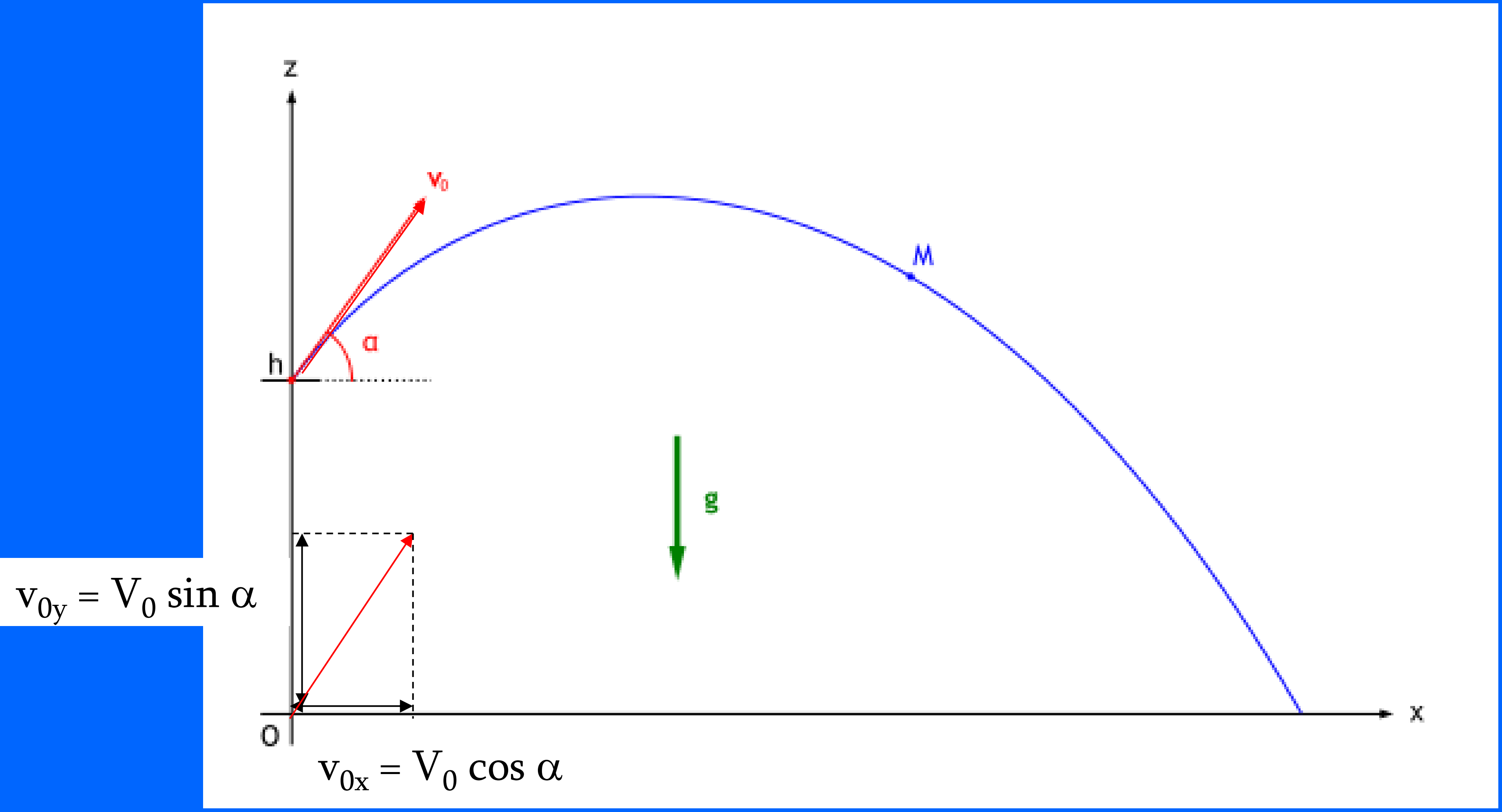
Mais aussi $v_x = f(t)$, $v_y = f(t)$ ainsi que $a_x = f(t)$ et $a_y = f(t)$

Nous venons d'obtenir par l'application de la 2ème loi de Newton celles de a_x et a_y (même si « t » n'apparaît pas).

Pour obtenir les autres, il faut d'abord identifier les conditions initiales.

Identification des conditions initiales





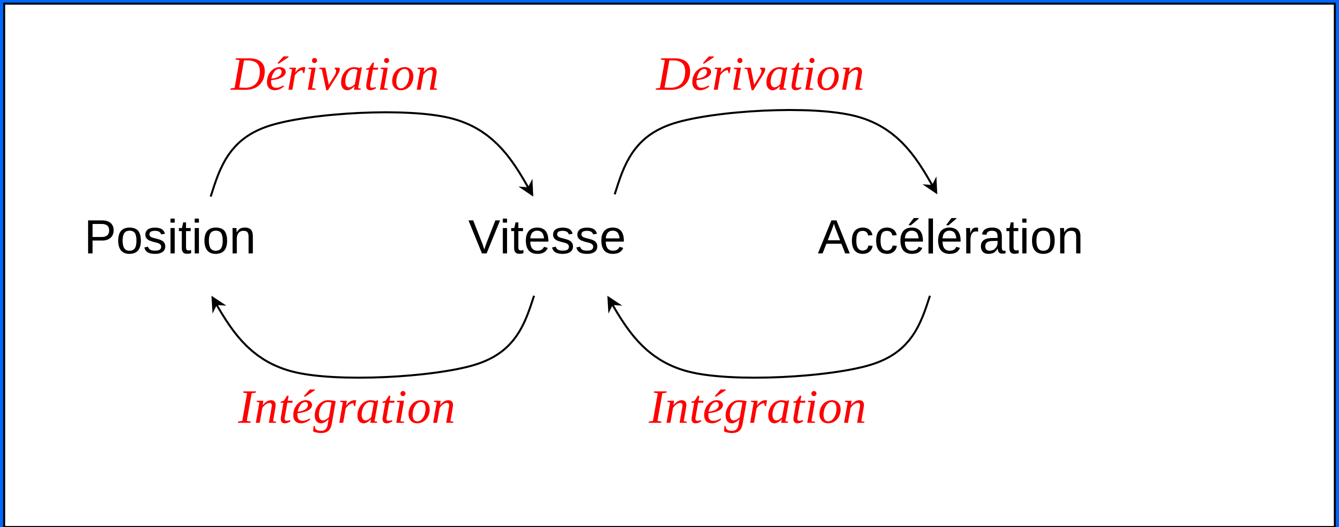
Les coordonnées du vecteur vitesse à la date t = 0 sont:

$$v_{0x} = V_0 \cos \alpha$$

$$v_{0y} = V_0 \sin \alpha$$

Comme le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, **le vecteur vitesse est une primitive du vecteur accélération**.

Ainsi, **on intègre le vecteur accélération pour trouver le vecteur vitesse :**



Détermination des coordonnées de la vitesse

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -g \end{pmatrix}$$

Par intégration: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = C1 \\ v_y = -gt + c2 \end{pmatrix}$

Détermination des constantes à partir des conditions initiales:

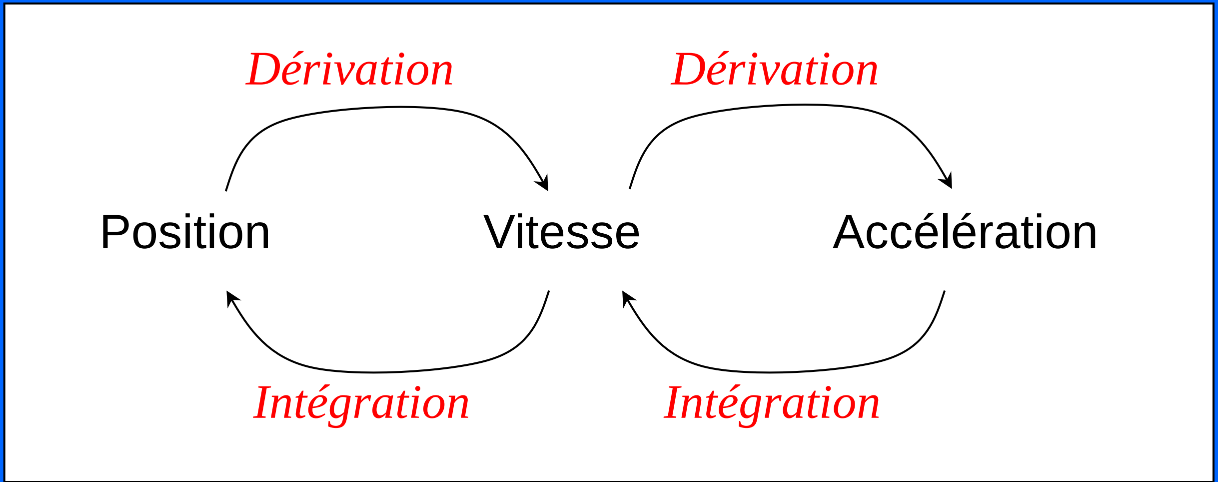
$$\vec{v}_{(t=0)} = \begin{pmatrix} c1 \\ -g \times 0 + c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

donc $c_1 = v_0 \cos \alpha$
et $c_2 = v_0 \sin \alpha$.

$$\boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}}$$

Comme le vecteur vitesse est la dérivée du vecteur position par rapport au temps, **le vecteur position est une primitive du vecteur vitesse**.

Ainsi, **on intègre le vecteur vitesse pour trouver le vecteur position :**



Détermination des coordonnées du vecteur position:

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$ avec $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Par intégration: $$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cos\alpha \times t + c_3 \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \times t + c_4 \end{pmatrix}$$

Détermination des constantes à partir des conditions initiales:

$$\overrightarrow{OG}_{(t=0)} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cos\alpha \times 0 + c_3 = x_0 = 0 \\ y = -\dfrac{1}{2} g 0^2 + v_0 \sin\alpha \times 0 + c_4 = y_0 = h \end{pmatrix}$$ Donc $c_3 = 0$ et $c_4 = h$

$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cos\alpha \times t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \times t + h \end{pmatrix}$$

Nous avons les équations horaires:

Pour l'accélération: $\mathbf{a_x = 0}$

$$\mathbf{a_y = -g}$$

Pour la vitesse: $\mathbf{v_x = v_0 \cos \alpha}$

$$\mathbf{v_y = -gt + v_0 \sin \alpha}$$

Pour la position : $\mathbf{x(t) = v_0 \cos \alpha \times t}$

$$\mathbf{y(t) = -\tfrac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \alpha \times t + h}$$

Etablissement de l'équation de la trajectoire y = f(x):

À partir de la composante de x, on extrait t: $t = \dfrac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$

On remplace t dans l'expression de y et on fait apparaître x:

$$y = -\frac{1}{2} \times g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \times \sin\alpha \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos\alpha} \right) + h$$

On simplifie et on obtient l'équation d'une parabole:

$$\boxed{y = -\frac{g \times x^2}{2 \times {v_0}^2 \times \cos^2\alpha} + x \times \tan\alpha + h}$$