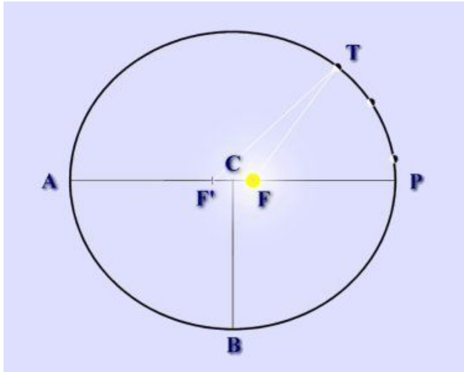
Lois de KEPLER

1ère Loi de Kepler

Les planètes tournent autour du Soleil en suivant des orbites en forme d'ellipse dont le Soleil occupe un des foyers.

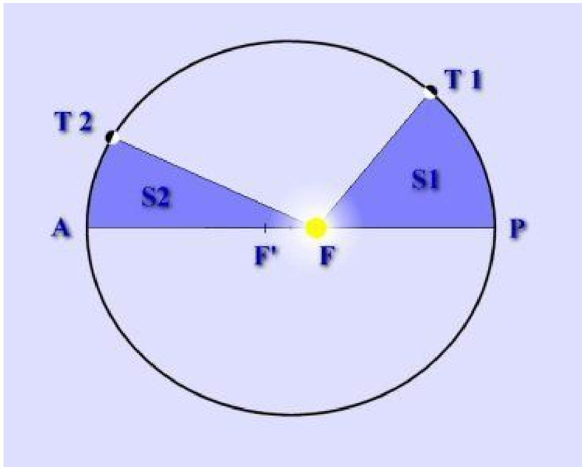
F et F' : les deux foyers de l'ellipse. Le Soleil est en F.
C : Centre géométrique de l'ellipse
P : Périhélie
A : Aphélie
T : Terre *comme exemple*
Deux grandeurs définissent la forme de l'ellipse :
son demi-grand axe : AC ou CP = **a**
et son excentricité : **e** = CF / a



2ème loi de Kepler

Les aires balayées par le rayon vecteur d'une planète sont proportionnelles au temps.

Le rayon vecteur est le segment de droite qui relie la planète au Soleil, sa longueur est variable.
Les deux triangles curvilignes F-P-T1 et F-T2-A ont la même surface, soit S1 = S2.
La 2ème loi de Kepler implique que ces **surfaces**, étant **égales** entre elles, ont été balayées en des **temps égaux.** La planète a donc mis le même temps pour aller de P à T1 que pour aller de T2 à A.



3ème loi de Kepler

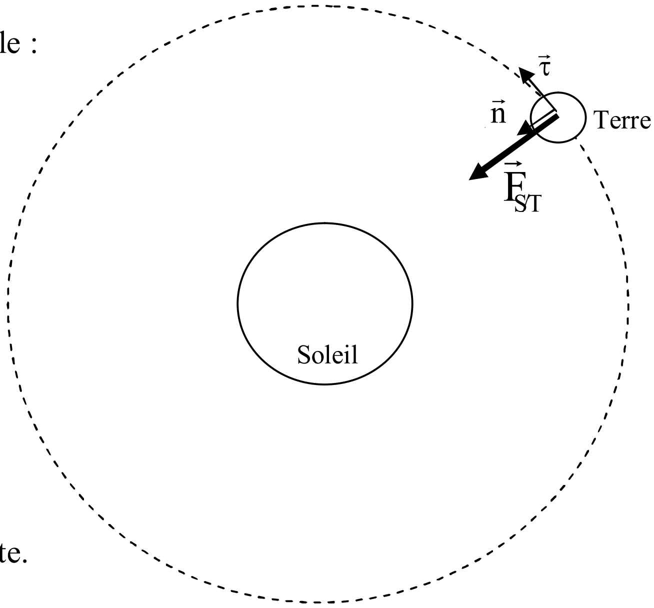
Pour toutes les orbites planétaires (satellites) le rapport du carré des périodes de révolution (T en s) au cube du demi-grand-axe de l'orbite (a en m) est constant.

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = K} \quad \text{avec} \quad K = \frac{4\pi^2}{GM}$$

K étant une constante dépendant de la constante de gravitation universelle G = $6{,}67.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ et de la masse de l'astre central M autour duquel tournent les planètes ou satellites.

Mouvement des satellites et des planètes

Pour traiter le sujet, prenons l'exemple de la Terre autour du Soleil, ainsi la Terre est le système et le référentiel galiléen est héliocentrique. La Terre décrit une orbite quasi-circulaire.



La seule force exercée sur la Terre est la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{S/T} = G\frac{M_S \times M_T}{d_{ST}^2}\vec{n}$$

d_{ST} est la distance séparant les centres du soleil et de la terre.

1) Application de la 2ème Loi de Newton :

$\vec{F}_{S/T} = M_T \times \vec{a}$

Ainsi : $\vec{F}_{S/T} = G\frac{M_S \times M_T}{d_{ST}^2}\vec{n} = M_T \times \vec{a}$

Après simplification par M_T : $G\frac{M_S}{d_{ST}^2}\vec{n} = \vec{a}$

L'accélération est suivant $\vec{n}$, donc elle est radiale et centripète.

2) Montrons que le mouvement circulaire est uniforme :

On considère ici que la Terre décrit un cercle de rayon $R_T = d_{ST}$

Dans le repère $\vec{n}$,T, $\vec{\tau}$ (appelé repère de Frenet), l'accélération s'écrit : $\vec{a} = \frac{V^2}{R}\vec{n} + \frac{dV}{dt}\vec{\tau}$ (1)

Ici, V est la vitesse de la Terre sur son orbite, R le rayon de l'orbite soit $R = R_T = d_{ST}$

On rappelle que $\frac{dV}{dt}$ est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

En reprenant l'expression trouvée après application de la 2ème loi de Newton : $G\frac{M_S}{d_{ST}^2}\vec{n} = \vec{a}$ (2)

On voit que l'accélération n'a pas de composante suivant $\vec{\tau}$ et en égalisant avec l'expression (1), on peut écrire que $\frac{dV}{dt} = 0$ ce qui implique que la vitesse ne varie pas et donc que le mouvement circulaire est uniforme (cqfd).

3) Expression de la vitesse :

Suivant $\vec{n}$, et en égalisant les expressions (1) et (2) de l'accélération : $G\frac{M_S}{d_{ST}^2} = \frac{V^2}{d_{ST}}$

En simplifiant : $G\frac{M_S}{d_{ST}} = V^2$ et ainsi $\boxed{V = \sqrt{\frac{G \times M_S}{d_{ST}}}}$

Remarque : G, M_S, d_{ST} étant des constantes on retrouve que la vitesse est constante donc le mouvement uniforme.

4) Période de révolution de la Terre autour du Soleil :

T la période de révolution est la durée pour faire un tour à la vitesse V.

La distance parcourue pendant un tour est la circonférence du cercle soit : $2\pi R_T$ ou encore $2\pi d_{ST}$.

Ainsi $V = \dfrac{2 \times \pi \times d_{ST}}{T}$ ou encore $\sqrt{\dfrac{G \times M_S}{d_{ST}}} = \dfrac{2 \times \pi \times d_{ST}}{T}$ on met au carré $G\dfrac{M_S}{d_{ST}} = \dfrac{4 \times \pi^2 \times d_{ST}^2}{T^2}$

On extrait la période et on trouve $T^2 = \dfrac{4 \times \pi^2 \times d_{ST}^3}{G \times M_S}$ ce qui permet d'écrire : $\boxed{T = \sqrt{\dfrac{4 \times \pi^2 \times d_{ST}^3}{G \times M_S}}}$

Remarque : On retrouve la **3ème loi de Kepler** : $\dfrac{T^2}{d_{ST}^3} = \dfrac{4 \times \pi^2}{G \times M_S} = \text{cte}$

Faire l'application numérique de la constante avec $G = 6{,}67.10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ et $M_S = 2{,}00.10^{30}$ kg , montrer que la constante vaut environ 3.10^{-19} $s^2.m^{-3}$.

Une démonstration semblable est dans le livre avec au centre la Terre et un satellite en orbite…